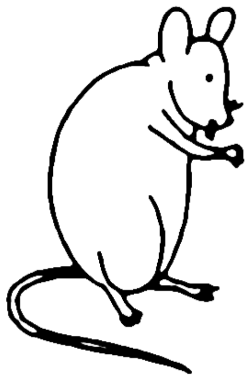
Le rallye du lycée François 1^{er}

Année scolaire

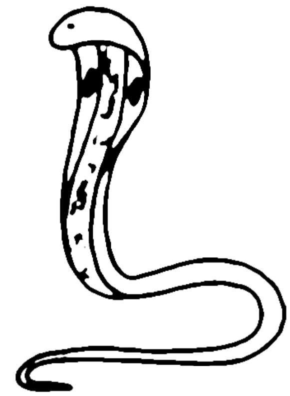
2004 2005

Les sujets

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er

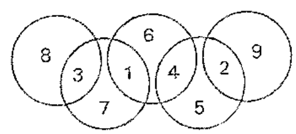


Un petit tour de chauffe

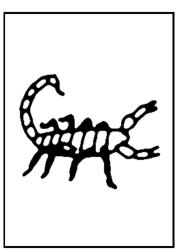


2004, année olympique

Les chiffres de 1 à 9 ont été mis dans les régions déterminées par les cinq anneaux olympiques de telles sorte que dans chaque anneau la somme est égale à 11 :



Disposez autrement les neuf chiffres pour que la somme soit la plus grande possible.
Bien entendu cette somme doit être la même pour chaque anneau.



Univers impitoyable

Dans un désert, il y a des serpents, des souris et des scorpions. Chaque matin, chaque serpent mange une souris. Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (et ça ne pardonne pas). Chaque soir, chaque souris mange un scorpion. Au bout d'une semaine, il ne reste plus qu'un animal : une souris.
Combien y avait-il de souris au début ?

$\int_a^b f(t)dt$ $\quad 2 \quad \Delta \quad \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er

Étape 1

Réponses à donner pour le 6 décembre

Problème 1

Dans un avion revenant d'Athènes, qui transporte cinq sportifs ayant participé aux Jeux Olympiques et classés en tête d'une même compétition (sans ex-æquo), on a pu entendre les affirmations suivantes :

A	:	Je n'étais pas dernier.
B	:	C était troisième.
C	:	A était derrière E.
D	:	E était second.
E	:	D n'était pas premier.

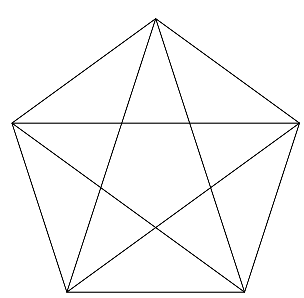
Par modestie, ou pour toute autre raison, les deux premiers du classement ont menti.
Quel était le classement réel ?

Problème 2

Vous disposez de 27 pièces d'or qui sont toutes d'apparence identique. Elles ont toutes le même poids sauf une seule d'entre elles. Vous souhaitez déterminer quelle est cette fausse pièce, à l'aide d'une balance à deux plateaux, par des pesées successives d'un certain nombre de pièces sur chacun des deux plateaux (vous ne disposez d'aucun autre poids).
Quel nombre minimal de pesées vous faudra-t-il pour trouver la fausse pièce ?

Problème 3

Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?



$\int_a^b f(t)dt$ $\quad 2 \quad$ $\triangleleft$ $\quad \mathbb{R} \quad$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^er^

Étape 2

Réponses à donner pour le 3 janvier

Problème 4

Tous les chats du quartier mangent dans la gamelle de mon chien.
Aucun chat tigré ne peut être autrement que futé.
Le chat Casimir n'a jamais eu de collier.
Les compagnons de jeu de mon chien aiment tous les os à moelle.
Seuls les chats du quartier sont futés.
Seuls ses compagnons de jeu mangent dans la gamelle de mon chien.
Les chats qui ne sont pas tigrés ont tous un collier.
Casimir aime-t-il les os à moelle ?

Problème 5

Devant un bocal de caramels, Pascal se dit : « Pour être sûr d'avoir :
– deux caramels enveloppés de papillotes de même couleur, il faudrait que j'en prenne au minimum quatre ;
– deux caramels enveloppés de papillotes de couleurs différentes, il faudrait que j'en prenne au minimum douze ;
– deux caramels enveloppés de papillotes bleues, il faudrait que j'en prenne au minimum dix ;
– deux caramels enveloppés de papillotes vertes, il faudrait que j'en prenne au minimum seize. »
Combien y a-t-il de caramels dans le bocal ?

Problème 6

Deux ponts enjambent une rivière à un kilomètre exactement l'un de l'autre. S'entraînant pour une course d'aviron, un concurrent remonte le cours de l'eau. Il rame à une vitesse constante et, ce faisant, passe sous les deux ponts. Alors qu'il se trouve juste sous le deuxième pont, sa casquette s'envole et tombe à l'eau. Dix minutes s'écoulent avant qu'il s'aperçoive qu'il l'a perdue. Il fait alors demi-tour et recommence à ramer, toujours à la même vitesse, dans la direction d'où il est venu. Finalement, il rattrape sa casquette sous le premier pont.
À quelle vitesse coule la rivière ?

$\int_a^b f(t)dt$ $\quad 2 \quad \triangleleft \quad \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er
Étape 3

Réponses à donner pour le 31 janvier

Problème 7

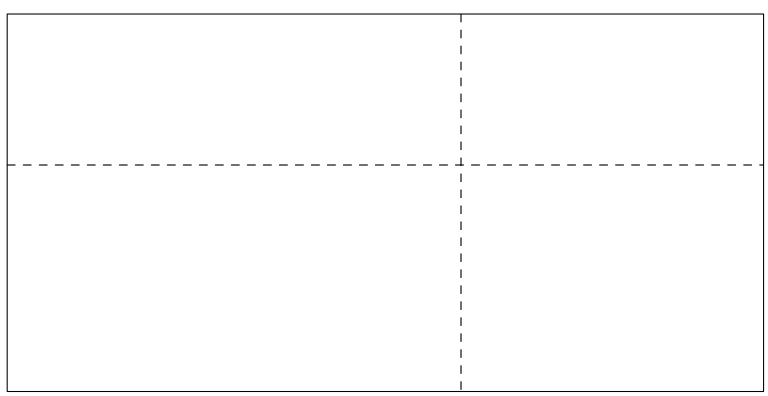
Le reste de la division par 7 de 2005 est 3.
– Quel est le reste de la division par 7 de 2005^2 ?
– Quel est le reste de la division par 7 de 2005^3 ?
– Quel est le reste de la division par 7 de 2005^{2005} ?

Problème 8

« Quel âge as-tu ? » demande Éric à son oncle Jérémie, professeur de mathématiques à la retraite.
« Mon âge est égal au nombre des côtés d'un polygone régulier dont tous les angles sont égaux à 175° », affirme ce dernier.
Quel est l'âge de l'oncle Jérémie ?

Problème 9

Mon quartier à la forme d'un rectangle. Il est découpé en quatre pâtés de maisons de forme rectangulaire, séparés par deux rues transversales, perpendiculaires et tracées en pointillés. Il est entouré de boulevards tracés en traits pleins.



Lorsque je fais le tour de chacun des quatre rectangles, obtenus en réunissant deux pâtés de maisons contigus, je parcours respectivement $600\,m$, $700\,m$, $800\,m$ et $900\,m$.
Quel est le périmètre de mon quartier ?
Précision : on ne tient pas compte de la largeur des rues.

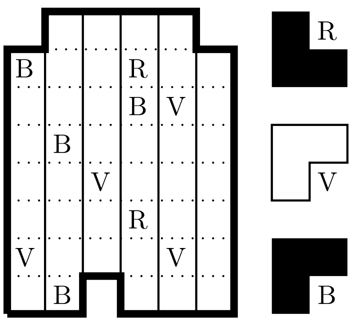
$\int_a^b f(t)dt$ $\quad 2 \quad \triangleleft \quad \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er}

Étape 4

Réponses à donner pour le 7 mars

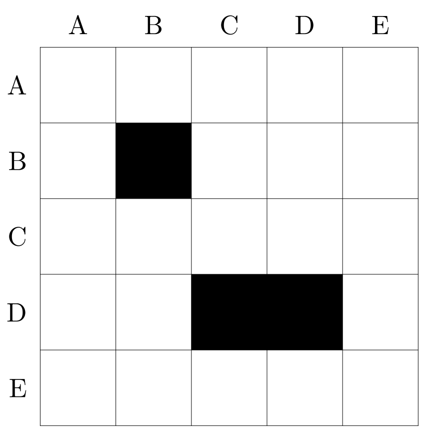
Problème 10



Nina a trouvé un vieux puzzle dans une malle du grenier de ses grands-parents. Il s'agit de remplir la boite ci-dessous avec des pièces e forme de L. Il y a cinq pièces bleues (B), cinq pièces vertes (V) et cinq pièces rouges (R).
« Facile ! », dit Thomas le frère de de Nina .
« Oui, mais cela l'est moins si on veut que deux pièces de la même couleur ne se touchent jamais par un côté !», rétorque Nina.

Problème 11

Nombres croisés



Remarque : Aucun nombre ne commence par zéro.

Horizontalement :

A. Si on ajoute 30 à ce nombre, on obtient un carré parfait.
B. Le produit de ses chiffres est 72.
C. Une des permutations de 33 347.
D. La somme de ses chiffres est 8.
E. Le produit de ses chiffres est 15 435.

Verticalement :

A. L'écriture de ce nombre est symétrique.
B. Une des puissances de 3.
C. Ce nombre se divise exactement par 47.
D. C'est un carré parfait.
E. Les chiffres de ce nombre, dans leur ordre d'écriture, sont consécutifs.

Attention, suite du sujet au verso

Problème 12

On sait que :

1 cinq maisons alignées, de couleurs différentes, sont habitées par des hommes de nationalités et de professions différentes, chacun ayant une boisson préférée et un animal favori ;

2 l'Anglais vit dans la maison rouge ;

3 l'Espagnol possède un chien ;

4 on boit du café dans la maison verte ;

5 l'Ukrainien boit du thé ;

6 la maison verte est immédiatement à votre droite (en regardant les maisons) de la maison blanche ;

7 le docteur possède l'escargot ;

8 le diplomate habite la maison jaune ;

9 on boit du lait dans la maison du milieu ;

10 le Norvégien vit dans la première maison (celle qui est la plus à gauche) ;

11 le professeur vit dans la maison voisine de celle où se trouve le renard ;

12 le diplomate vit dans la maison voisine de celle où se trouve le cheval ;

13 l'architecte boit du jus d'orange ;

14 le Japonais est ingénieur ;

15 le Norvégien vit dans la maison voisine de la maison bleue ;

16 l'un des habitants boit de l'eau et un zèbre est l'animal favori d'un des habitants.

Représenter l'emplacement de chacune des maisons en précisant leur couleur, la nationalité de son habitant, sa profession, sa boisson préférée et son animal favori.

$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er
Étape 6

Réponses à donner pour le 10 mai

Problème 16

1 Mme Thierry doit organiser un examen comportant six épreuves. Il y a des candidats communs pour certaines de ces épreuves, ce qui fait qu'elles ne peuvent se passer en même temps. On donne le tableau des impossibilités :

	1	2	3	4	5	6
1		**X**	X	X		X
2	**X**		X	X	X	X
3	X	X		X	X	
4	X	X	X		X	X
5		X	X	X		X
6	X	X		X	X	

Par exemple, les croix écrites en gras indiquent que les épreuves 1 et 2 ont des candidats communs.

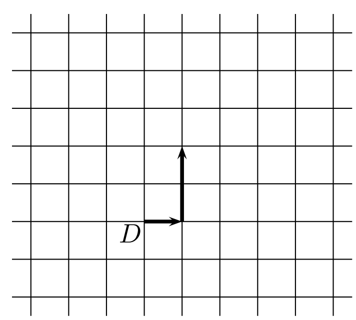
Si un candidat passe au maximum une épreuve par jour, quelle est la durée minimale de l'examen ?
Proposer une organisation à Mme Thierry.

2 Même question avec sept épreuves et le tableau des impossibilités suivant :

	1	2	3	4	5	6	7
1		X		X	X	X	X
2	X		X	X	X		
3		X		X		X	X
4	X	X	X		X	X	
5	X			X		X	
6	X	X	X	X	X		X
7	X		X			X	

Problème 17

Une puce savante se déplace par sauts, en suivant les lignes d'un réseau quadrillé. elle s'arrange pour que chaque saut s'effectue dans une direction perpendiculaire à celle du saut précédent. En outre, la longueur de chaque saut est supérieure d'une unité à celle du précédent. La figure ci-contre montre ses deux premiers sauts. Quels devront être les suivants pour que la puce revienne à son point de départ D en un minimum de sauts ?



Problème 18

Trois individus ☹ 😐 ☺ veulent entrer dans un club et doivent passer un test.
Les trois sont placés de telle sorte que chacun peut voir les deux autres. On leur explique qu'on va leur bander les yeux et leur poser un chapeau blanc ou noir sur la tête. En retirant le bandeau, si l'individu aperçoit au moins un chapeau blanc sur la tête d'un autre participant, il doit lever la main.
Le but du jeu est évidemment de deviner la couleur de son propre chapeau (que le participant ne peut voir d'aucune façon).
On bande donc les yeux des trois participants et on dépose un chapeau blanc sur la tête de chacun. On enlève les bandeaux. Les trois lèvent la main simultanément (puisque chaque individu voit au moins un chapeau blanc sur la tête d'un autre participant).
Après quelques instants ☺ affirme :« Mon chapeau est blanc ! ».
Comment ☺ a-t-il raisonné pour arriver à cette conclusion ?

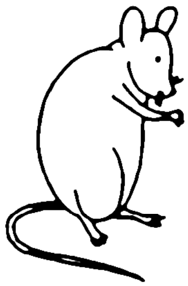
*Le rallye du lycée François 1^er^*

Année scolaire

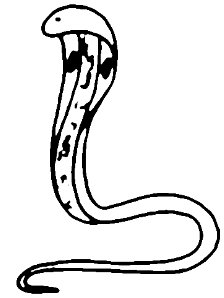
2005 2006

Les sujets

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er}



Un petit tour de chauffe



Problème 19 (SU-DOKU)

Les règles de ce jeu sont très simples. Une grille est composée de plusieurs carrés. Chaque carré contient tous les chiffres de 1 à 9. Chaque ligne comme chaque colonne contient aussi tous les chiffres de 1 à 9. On ne vous donne que certains chiffres, à vous de trouver les autres. Pour cela, procédez par déduction et élimination.

1		2	3					
	4		5	6	1			
	3					7	1	8
3		4	6	1				
9		7				1		6
				2	3	4		5
5	8	1					2	
			1	5	9		4	
					6	3		1

Problème 20 (Auto-référence)

Saurez-vous compléter la phrase suivante :

Cette phrase contient .... consonnes.

Problème 21 (Dites 33)

Trouver le plus petit nombre entier commençant par 4 tel qu'en supprimant ce 4, on trouve le nombre initial divisé par 33.

Vous avez aimé ?
Alors formez un groupe de deux à quatre personnes et inscrivez-vous.

Les G.O du Rallye

$\int_a^b f(t)dt$ 2 Δ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Étape 1

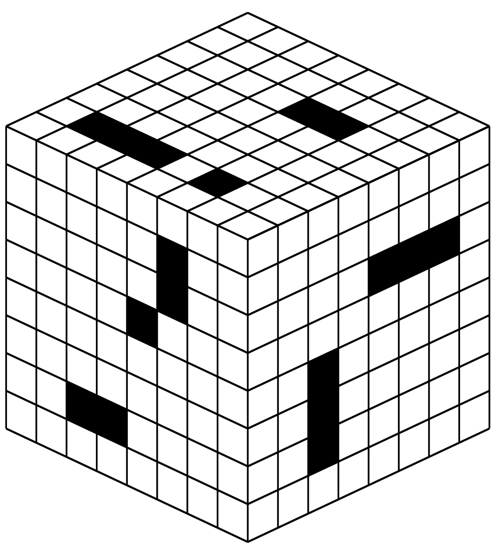
Réponses à donner pour le 28 novembre

Problème 22

Dans ce grand cube, toutes les rangées dont les extrémités sont noircies sont constituées de petits cubes noirs, les autres étant blancs.

1 Combien y-a-t-il de petits cubes blancs ?

2 On enlève une couche de petits cubes sur chacune des six faces du grand cube. Faire le dessin du nouveau cube.

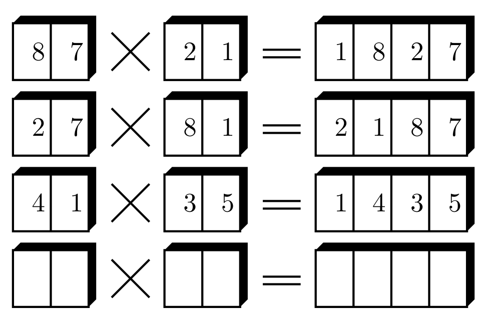


Problème 23 (Une histoire de pieds)

Quinze moutons paissaient dans un pré, accompagnés de bergers (tous les moutons ont quatre pieds et les bergers deux). La moitié des bergers ramènent au bercail le tiers des moutons. Il ne reste plus que cinquante pieds sur le pré. Combien y avait-il de pieds au début ?

Problème 24 (Les chiffres récurrents)

Les paires de chiffres inscrits dans les blocs de pierre ont une particularité : si on les multiplie entre elles, elles donnent comme résultat les mêmes quatre chiffres qui ont produit ce résultat. Quelle autre paire de chiffre ayant les mêmes propriétés peut venir occuper les blocs encore vierge ?



$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er
Étape 2

Épreuve à remettre avant le samedi 7 janvier 2006
La correction de l'épreuve 1 sera visible sur le site internet du lycée à partir du lundi 5 décembre.

Problème 25 (La chevelure des parisiennes !)

Le nombre de cheveux d'une femme ne dépasse jamais 400 000. Parmi les 1 500 000 parisiennes, est-on sûr qu'il y en a qui aient le même nombre de cheveux ? Si oui, combien ? (de parisiennes, pas de cheveux !)

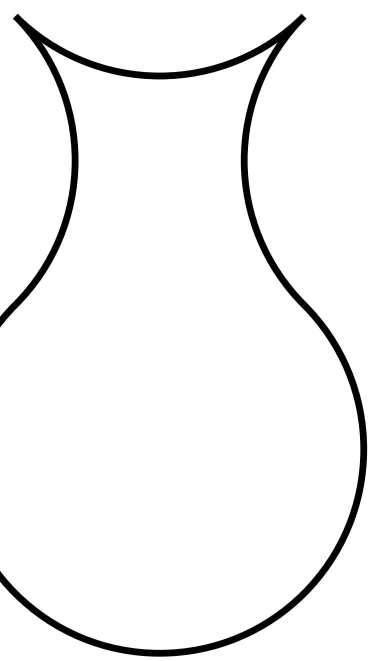
Problème 26 (Une histoire de chocolats)

Des chocolats se vendent fourrés pralin ou fourrés crème. Un sondage fait ressortir les faits suivants :
- le tiers des personnes interrogées achète des chocolats au pralin ;
- cinq cents personnes achètent les deux ;
- le quart des personnes n'achète pas de chocolats à la crème ;
- le douzième des personnes interrogées n'achète pas de ces chocolats.

Combien de personnes ont été interrogées au cours de ce sondage ?

Problème 27 (Un petit vase)

Comment couper cette surface en trois morceaux afin qu'ils forment un carré ?



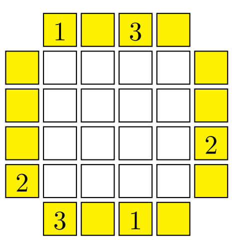
$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er} Étape 3

Réponses à donner pour le 6 février

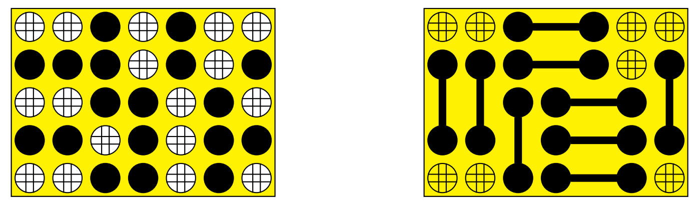
Problème 28 (Gratte-ciel)

Un bloc de la ville de New York a été représenté dans une grille. Chaque case contient un immeuble de 10, 20, 30 ou 40 étages. Les immeubles d'une même rangée, ligne ou colonne, sont tous de tailles différentes. Les informations données sur les bords indiquent le nombre d'immeubles visibles sur la rangée correspondante par un observateur situé à cet endroit. Par exemple, si une ligne contient la disposition $20 - 40 - 30 - 10$, deux immeubles sont visibles à partir de la gauche (le 20 et le 40) et trois immeubles sont visibles à partir de la droite (le 10, le 30 et le 40).
Retrouver la hauteur de chaque immeuble sachant que :

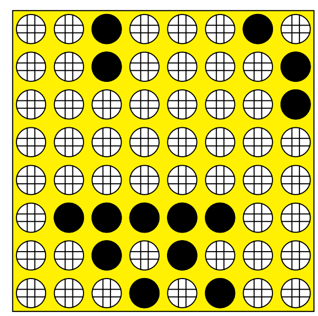


Problème 29 (Haltères)

Des haltères doivent être rangées dans leur boîte. Chaque haltère occupe trois cases alignées horizontalement ou verticalement : les cases de deux extrémités contiennent les poids, la barre se place dans la case centrale. Les haltères peuvent se toucher mais non se croiser. Chaque case contient au plus un poids, chaque poids étant l'extrémité d'une seule haltère. Les emplacements des poids sont marqués au fond de la boîte. Malheureusement certains d'entre eux ont été effacés. Retrouvez les haltères se trouvant dans la grille.
Par exemple, la configuration suivante avec neuf haltères :



Compléter la boîte suivante sachant qu'elle contient exactement 20 haltères :



Problème 30 (Logique)

Cinq amis aux noms prédestinés : Biche, Cerf, Lièvre, Sanglier et Chevreuil, reviennent d'une partie de chasse. Ils en ramènent les animaux correspondant à leurs noms, mais pas nécessairement dans cet ordre. Chacun a tué un seul animal, ne correspondant pas à son propre nom. Chacun a également raté un animal différent, qui n'est pas le même que celui qu'il a tué et qui ne correspond pas à son nom non plus. On sait que :

- le cerf a été tué par le chasseur ayant le nom du gibier raté par **Chevreuil** ;
- la biche a été tuée par le chasseur ayant le nom du gibier raté par **Lièvre** ;
- **Cerf**, qui a raté un chevreuil, a été très déçu de ne tuer qu'un lièvre.

Quelles sont les bêtes ratées et tuées par chacun ?

$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er} Étape 4

Réponses à donner pour le 6 mars

Problème 31 (Saint Valentin)

Cinq hommes sont amoureux de cinq femmes.
Ces hommes et ces femmes sont originaires de cinq pays européens (un homme et une femme par pays) : Angleterre, France, Grèce, Italie et Suède.
Dans chaque couple, l'homme et la femme sont de nationalités différentes.
Deux couples ne peuvent être formés avec les mêmes nationalités. Par exemple, si l'italien aime la suédoise alors le suédois ne pourra aimer l'italienne.
L'anglais est épris de la compatriote de celui qui aime la française.
Le Grec est amoureux de celle dont le compatriote aime une femme de la même nationalité que l'homme qui est amoureux de celle dont le compatriote est amoureux de l'italienne.

Qui est amoureux de qui ?

Problème 32 (Carré palindromique)

$$(\bullet\quad\bullet\quad\bullet)^2 = \bullet\quad\bullet\quad\bullet\quad\bullet\quad\bullet\quad\bullet$$

Il s'agit de trouver un carré parfait formé de six chiffres, qui soit palindromique, c'est-à-dire qu'il n'est pas modifié selon qu'on le lit de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 121 est un carré palindromique ; lu à l'envers, il reste identique à lui-même. Ce problème n'admet qu'une solution. À vous de la trouver.

Problème 33 (Gratte-ciel (suite))

On considère un problème analogue à celui de l'étape précédente mais chaque ligne, chaque colonne comporte six cases et les gratte-ciel sont de 10, 20, 30, 40, 50 et 60 étages.
La grille à compléter est la suivante :

		4					
2							4
2							
							5
			3	6		2	

$\int_a^b f(t)dt$ $\quad 2 \quad \triangleleft \quad \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er} Étape 5

Réponses à donner pour le 27 mars

Problème 34 (Mais où est passé l'argent ?)

Deux fermières viennent vendre leurs pommes au marché. La première vend trente pommes, à raison de deux pour cinq euros. La seconde vend trente pommes, à raison de trois pour cinq euros. Elles vendent tous leurs fruits, la première empoche donc soixante-quinze euros, et la seconde cinquante, soit au total cent vingt-cinq euros. La semaine suivante, elles décident de s'allier à raison de cinq pour dix euros. Elles ramènent donc cent vingt euros. La seconde proteste : « cent vingt euros, c'est cinq de moins que la semaine précédente.»
Mais où est passé l'argent ?

Problème 35 (Un petit problème de carrelage)

Dans la maison de Timothée, une pièce rectangulaire a son sol recouvert de carreaux carrés. Un des côtés comprend quatre-vingt-treize carreaux et l'autre deux cent trente et un.
Timothée trace une ligne droite joignant deux coins opposés. Combien cette ligne traverse-t-elle de carreaux ?

Problème 36 (L'Île du Pendu)

Se promenant au bord de la mer, Véro trouve un parchemin dans une bouteille jetée à la mer. Dessus il est écrit :

« Rend toi à l'Île du Pendu. Tu verras sur cette île un chêne et un érable. Tu verras aussi une potence où les traites étaient pendus. À partir de la potence, dirige-toi vers l'érable en comptant tes pas. À l'érable, tourne sur ta droite d'un quart de tour et marche le même nombre de pas. Plante un pieu, et retourne à la potence. Marche en direction du chêne en comptant tes pas. Au chêne tourne sur la gauche d'un quart de tour et marche le même nombre de pas. Plante un pieu. À mi-chemin entre les pieux , tu trouveras le trésor. »

Intriguée, Véro se rend sur l'Île du Pendu, trouve le chêne et l'érable, mais à son grand désespoir, la potence a disparu. Folle de rage, elle creuse au hasard, mais ne trouve rien. Pourtant, le trésor est là. Saurez-vous l'aider à le trouver ?

$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er} Étape 6 et dernière

Réponses à donner pour le 9 mai La remise des prix aura lieu le mercredi 24 mai à 12h00 dans le hall du lycée.

Problème 37 (Salaire spécial)

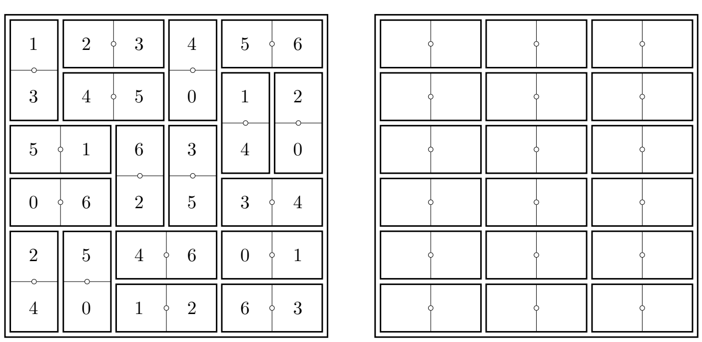
Michel va bientôt être augmenté et gagner 3 000 € par mois. Il remarque que son salaire actuel a la curieuse propriété suivante : « divisé par 10, son reste vaut 9 », « divisé par 9, son reste vaut 8 » et ainsi de suite jusqu'à « divisé par 2 son reste vaut 1 ».
Combien gagne donc Michel actuellement ?

Problème 38 (La hauteur de la cuve)

Pour remplir une cuve cylindrique, on dispose de plusieurs tuyaux d'arrivée, tous de même débit.
Ces tuyaux sont ouverts progressivement l'un après l'autre.
Au départ un seul est ouvert. Lorsqu'au bout de 20 minutes, l'eau atteint le premier niveau situé à 40 cm du fond, niveau constaté par un détecteur, le deuxième tuyau s'ouvre, le premier restant ouvert.
Un détecteur de niveau est placé tous les 40 cm le long de la paroi de la cuve, à partir du fond et chaque fois que l'eau atteint un détecteur, un nouveau tuyau s'ouvre, les autres tuyaux déjà ouverts continuant à le rester. Le mécanisme s'arrête 50 minutes après l'ouverture du premier tuyau. Le niveau de l'eau dans la cuve se trouve alors à 16 cm du bord supérieur.
Quelle est la hauteur de la cuve ?

Problème 39 (Carré latin de dominos)

La figure ci-dessous nous montre comment réaliser un carré latin 6×6 avec 18 dominos classiques. Un tel carré est caractérisé par les propriétés suivantes :
– les 6 dés contenus dans une même rangée sont tous de valeur différente ;
– les 6 dés contenus dans une même colonne sont tous de valeur différente ;
– les 6 dés contenus dans chacune des deux grandes diagonales sont tous de valeur différente.
Peut-on, avec ces mêmes 18 dominos, reconstituer un carré latin respectant ces trois conditions, avec tous les dominos disposés horizontalement comme sur la figure de droite ? La réponse est « oui » et bon courage !



$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Le rallye du lycée François 1^{er}

Année scolaire

2006 2007

Les sujets

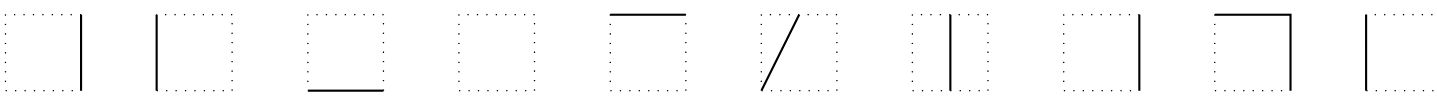
« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er

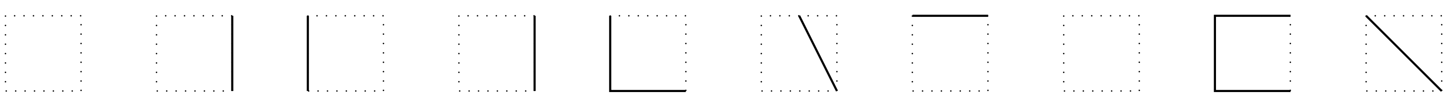
Un petit tour de chauffe

Problème 40

Olivier a reçu un message mais la machine défectueuse a omis des barres de plusieurs lettres de ce mot écrit en mode dactylographique :



Le correspondant d'Olivier constatant que sa machine « mange » certains traits renvoie le même message à Olivier en espérant que ce deuxième message complétera le premier ... Hélas, le même mot est transmis ainsi :



Aidez Olivier à reconstituer ce mot.
Indication : ce n'est pas une indication.

Problème 41

Trouver un nombre à trois chiffres possédant les propriétés suivantes :

1 le chiffre des dizaines est égal à 7 ;

2 le chiffre des centaines est inférieur de 4 à celui des unités ;

3 si on inverse l'ordre des chiffres, le nombre obtenu sera supérieur de 396 au nombre cherché.

Vous avez aimé ?
Alors formez un groupe de deux à quatre personnes et inscrivez-vous.

Les G.O du Rallye

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Étape 1

Réponses à donner pour le 28 novembre

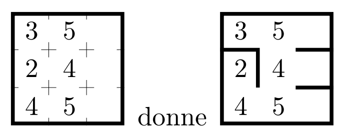
Problème 42 (Muséum)

Ce musée est un vrai labyrinthe : on peut visiter toutes les salles, mais il n'existe qu'un seul chemin pour aller d'une salle quelconque à une autre sans repasser par une même salle. Lorsqu'on se trouve dans une salle, on peut voir d'autres en enfilade (horizontalement ou verticalement sur le plan) : celles dont on n'est pas séparé par un mur. Dans certaines cases, il est indiqué le nombre de salles que l'on peut voir, y compris celles où l'on se trouve.

Grille à compléter

6	2	7	4	3	4
7	2	8	4	3	2
6	3	6	4	4	2
7	4	6	4	4	2
6	4	7	6	5	4
6	4	9	7	4	2

Exemple et solution



Problème 43 (Écrits vains)

Donnez à chaque écrivain ci-dessous le titre d'une de ses œuvres... Le romancier et le titre, cependant, ont été transformés en jouant sur les sons ou le sens. Ainsi, Beaumarchais pourrait devenir « Le bel homme avançait à pied » (Beau marchait) ou encore « L'onguent pour jouer du violon » (Beaume archet). Pour les titres, nous avons joué que sur le sens : « Le Barbier de Séville » devenant par exemple, « Le coiffeur de la capitale Andalouse ». Ici, cependant, il ne s'agit que d'écrivain du XXème siècle et tous français.

1. Belle vision
2. Coriace, la première carte
3. Elle lui appartient, la mitaine
4. Existe 365 jours
5. La colline troisième n'est pas rapide
6. La onzième lettre change de voix
7. La région frontalière de l'Allemagne est invitée
8. La soutane brûlait
9. Le perroquet charnière
10. Mauvais rôti
11. On le prend pour une oie, ce cervidé
12. Où se trouve la bouche de l'oiseau ?

A. L'allochtone
B. L'Amoureux
C. La piste des rois
D. La souveraine décédée
E. La troisième saison dans la capitale asiatique
F. Le cheval en pyjama
G. Le musée des étoiles
H. Le second zizi
I. Le store vénitien
J. Les atomes primitifs
K. Les sept jours bénis
L. Salut chagrin

Problème 44 (Logique)

Cinq lingots forment un trésor : ils sont faits respectivement d'or, d'argent, de platine, de nickel et de bronze. Chacun est dans un de ces cinq coffres, qui sont numérotés de 1 à 5. Sur chaque coffre figure une inscription. Toutes ces affirmations sont fausses, sauf une, celle qui figure sur le coffre qui contient le lingot d'or !

Coffre 1	**Coffre 2**	**Coffre 3**	**Coffre 4**	**Coffre 5**
L'or est dans le coffre 2 ou dans le coffre 3.	L'argent est dans le coffre 1.	Le bronze n'est pas ici.	Le nickel est dans le coffre qui porte le numéro qui précède celui de l'or.	Le platine est dans le coffre qui porte le numéro qui suit celui qui contient le bronze.

Trouver le contenu de chaque coffre.

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Étape 2

Réponses à donner pour le 18 décembre

Problème 45 (L'équipe des faucheurs)

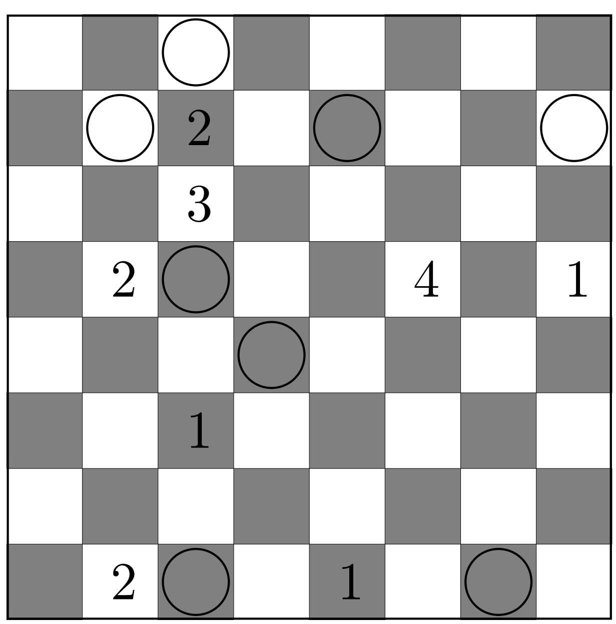
Dans ses souvenirs sur Léon Tolstoï, le physicien A. Tzinger mentionne un problème qui plaisait beaucoup au grand écrivain :
« Une équipe de faucheurs avait à faucher deux prés dont l'un était deux fois plus grand que l'autre. Durant une moitié de la journée, l'équipe a fauché une partie du grand pré. Ensuite elle s'est divisée en deux groupes. Les faucheurs du premier groupe sont restés sur le grand pré, qu'ils ont fini de faucher vers le soir ; ceux du second ont fauché le deuxième pré également jusqu'au soir, mais il en est resté une parcelle qu'un faucheur a terminé le lendemain en une journée de travail.
Combien de faucheurs y avait-il dans l'équipe sachant qu'ils travaillent tous au même rythme ? »

Problème 46 (BAT-BIGA-HIRU)

Savez-vous compter en basque de 1 à 9 ?
C'est très simple. Voilà : BAT, BIGA, HIRU, LAU, BOST, SEI, ZAZPI, ZORTZI et BEDERATZI.
Il ne nous reste plus qu'à placer chacun de ces neuf jolis mots sur le tableau suivant de façon que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale donne le même résultat : HAMABOST.

Problème 47 (Place the pieces)

I've laid out some chess pieces on the board, in the marked positions - a king, a queen, two knights, two bishops and two rooks. The numbers in some squares show how many pieces could move to that square using their normal chess moves. Can you place the eight pieces ?



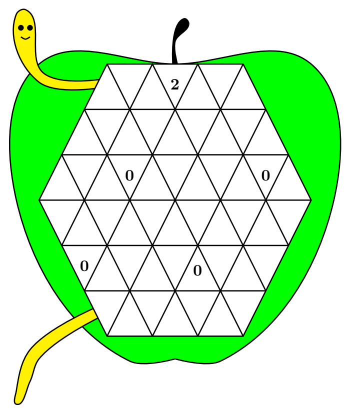
« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1^{er}
Étape 3

Réponses à donner pour le 29 janvier

Problème 48 (TRA-VERS)

Retrouvez le chemin du ver sachant que :
– il ne passe jamais deux fois à travers la même case ;
– il entre et ressort par les cases indiquées ;
– on appelle cases voisines deux cases ayant un côté commun ;
– le nombre de cases traversées par le ver parmi les voisines est indiqué sur certaines cases ;
– le ver traverse les cases en entrant par le milieu d'un côté et ressort par le milieu d'un autre ;
– le ver ne passe pas par les cases marquées d'un nombre.



Problème 49 (AUTO-COMMENTAIRE)

L'agence spaciale de Maths-Pays veut envoyer dans l'espace un message à d'éventuels extraterrestres.

A	3	1								
B	1	3								
C	1	1	1	3						

Les lignes **A**, **B** et **C** du tableau sont remplies avec les chiffres **1**, **2** et **3** de façon que :
– la ligne **B** commente la ligne **A** à partir du début (un "3",...) ;
– la ligne **C** commente la ligne **B** à partir du début (un "1", un "3",...) ;
– la ligne **A** commente la ligne **C** à partir du début (trois "1",...).
Dans chaque ligne, deux commentaires consécutifs doivent porter sur des chiffres différents. Quand le commentaire est plus long que dix chiffres, seuls les dix premiers chiffres sont inscrits.
Complétez le tableau.

Problème 50 (LES MONTRES)

La montre de Mathias avance de trois minutes par heure. Celle de son professeur, Gérard Manletemps, retarde de cinq minutes par heure. Elles ont été mises à l'heure au même instant, ce matin même. Or, vers la fin du dernier cours de la journée, l'une marquait 15 H 55 alors que l'autre indiquait 17 H 07.
Quelle heure était-il (à l'horloge officielle) quand elles ont été mises à l'heure ?

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er

Étape 4

Réponses à donner pour le 19 mars

Problème 51 (File d'attente)

Cinq personnes font la queue. À partir de la deuxième personne de la file, on constate que l'âge d'une personne augmenté du triple de l'âge de la personne située devant est toujours égal à cent dix ans (les âges sont entiers).
Quel est l'âge de la première personne de la file ?

Problème 52 (Le problème d'Euler)

Dans son autobiographie, Stendhal raconte les souvenirs de ses amis d'études :
« Je trouvai chez lui (M. Chabert, professeur de mathématiques) un bouquin d'Euler et son problème sur le nombre d'œufs qu'une paysanne apportait au marché ...
Cela m'ouvrit l'esprit, j'entrevis ce que c'était que se servir de l'instrument nommé algèbre. Du diable si personne me l'avait jamais dit ... »
Voici ce problème, extrait de *l'Introduction à l'algèbre* d'Euler, qui avait impressionné le jeune Stendhal.
Deux paysannes ont apporté au marché ensemble cent œufs. L'une d'elles avait un plus grand nombre d'œufs que l'autre, mais toutes les deux ont reçu la même somme. La première a dit alors à la seconde : « Si j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 15 kreutzers ». L'autre a répondu : « Et si moi, j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 6 kreutzers et $\frac{2}{3}$ » .
Combien d'œufs avait chaque paysanne ?

Problème 53 (Eubani)

Quels sont les trois nombres qui prolongent logiquement la séquence ci-après :

$$1, 3, 5, 6, 8, 10, 18, 20, 23, 25, 26, 28, ?, ?, ?$$

Nota : ne pas oublier de bien lire le titre même s'il paraît barbare !

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Étape 5

Réponses à donner pour le 6 mai

Problème 54 (Cadenas)

Julie vient d'acheter un beau cadenas avec une combinaison à cinq chiffres. Elle dit à son copain Bernard, en lui tendant le cadenas fermé :
« Tiens essaie donc de l'ouvrir, pour t'aider voici quelques informations :
– la somme des chiffres du nombre formant la combinaison est 27 ;
– si on divise le nombre formant la combinaison par 27, la somme des chiffres du résultat trouvé est encore 27 ;
– si on multiplie le nombre formant la combinaison par 27, la somme des chiffres du résultat trouvé est encore 27. »
Julie est sûre que Bernard échouera, cependant Bernard étant un mathématicien brillant, il lui rend rapidement son cadenas ouvert.
D'après les informations données par Julie, combien y a-t-il de possibilités de combinaisons ouvrant le cadenas et quelles sont-elles ?

Problème 55 (La vapeur et le radeau)

Un vapeur a mis cinq heures pour aller sans s'arrêter d'une ville A à une ville B située en aval du fleuve. Au retour, le vapeur a mis sept heures pour remonter le courant, également sans s'arrêter et en gardant la même vitesse propre.
Combien de temps mettra un radeau pour aller de A à B, sachant qu'il se déplace avec la vitesse du courant ?

Problème 56 (Le chat et la souris)

Une souris est à vingt pas de son trou. Un chat est à cinq bonds de la souris. Pendant que le chat fait un bond, la souris fait trois pas. Un bond de chat a la même longueur que dix pas de souris.
Le chat rattrapera-t-il la souris ?

Le rallye du lycée François 1er

Année scolaire

2007 2008

Les sujets

Un petit tour de chauffe

Problème 57 (Un anniversaire russe)

À l'anniversaire de Masha sont venus : un grand-père, une grand-mère, quatre mères, deux pères, quatre fils, quatre filles, quatre frères, quatre soeurs,trois petits-fils, une petite-fille, trois tantes, un oncle, trois neveux et une nièce.
Combien d'invités y avait-il ?

Problème 58 (Bon anniversaire Boris)

En 1932, Boris a exactement l'âge indiqué par les deux derniers chiffres de son année de naissance. Son grand-père également.
Cela semble impossible et pourtant quel âge ont-ils l'un et l'autre ?

Problème 59 (SUDOKU)

Complétez la grille de manière que dans chaque ligne, chaque colonne, chaque région, les chiffres soient tous différents. Le plus grand chiffre que l'on utilise est égal à six. Le problème a une solution unique.

				1	
		4			
	5				
		6		3	
			5	4	

Règlement du rallye du lycée François 1er « tournez méninges »

1 Former un groupe de 2 à 4 personnes (on peut mélanger élèves et adultes).
2 Désigner un responsable de groupe pour la liaison.
3 Préciser les points 1 et 2 par écrit et déposer ces informations dans l'urne placée à la loge.
4 Chaque épreuve (2 ou 3 parties) sera remise au responsable du groupe et sera en ligne sur le site du lycée.
5 Le bulletin réponse devra être remis au plus tard à la date fixée dans l'urne (environ 3 semaines de réflexion).
La correction sera donnée sur le site du lycée.
6 À la fin du rallye seront organisées, une épreuve pour départager les ex-aequo ainsi qu'une remise des récompenses.

En cas de problème : contacter :
Mme RIVOALLAN, M. FAGOT ou M. MEJANE

Réponses à donner pour le lundi 12 novembre

Problème 60 (Arithmétique et ecclésiastique)

Un curé dit à son bedeau : « j'ai vu aujourd'hui trois paroissiennes dont le produit des âges est 2 450. Peux-tu me dire leurs âges respectifs ? »
« Non », répond le bedeau.
« Et si je te dis que la somme de leurs âges est le double du tien ? »
« Pas encore », dit le bedeau.
« J'ajoute que la plus âgée est plus âgée que moi », indique le curé.
Et le bedeau, fin arithméticien, de dire : « maintenant j'en sais assez. »
Quels sont les âges des trois paroissiennes ?

Problème 61 (Alice au pays des mensonges)

Dans la forêt, Alice a deux compagnons : un lion qui ne ment que les lundis, mardis et mercredis et une licorne qui ne ment que les jeudis, vendredis et samedis. Un jour le lion dit à Alice : « hier c'était un de mes jours de mensonges ». La licorne dit alors : « moi aussi, hier c'était un des mes jours de mensonges ».
De quel jour de la semaine s'agit-il ?

Problème 62 (Quand y en a pour deux, y en a pour trois)

Deux bergers possèdent respectivement trois et cinq petits pains. Survient un chasseur et tout trois partagent également les huit petits pains. Le chasseur paie sa part : huit dinars.
Comment les bergers doivent-ils partager cette somme ?

« Tournez méninges »

le rallye du lycée François 1er
Étape 2

Réponses à donner pour le 17 décembre

Problème 63 (Le roi Dagobert)

OCCURENCES
Le roi Dagobert est distrait, il a oublié le code du coffre dans lequel il range ses attributs royaux.
Il va trouver saint Éloi, son trésorier, auquel il se souvient d'avoir confié un pense-bête, en cas de besoin. Ce dernier lui remet un parchemin sur lequel on peut lire :

> « Pour retrouver le code du coffre, il faut remplacer les blancs de la phrase qui suit par des chiffres, en faisant en sorte que cette phrase reste cohérente (les chiffres insérés étant également pris en compte). Les dix chiffres insérés, dans l'ordre, donneront le code. »

Voici la phrase :
« Dans cette phrase, le nombre d'occurrences de 0 est ... de 1 est ... de 2 est ... de 3 est ... de 4 est ... de 5 est ... de 6 est ... de 7 est ... de 8 est ... et de 9 est ... .»
Quel code le roi Dagobert doit-il composer pour pouvoir ouvrir son coffre et récupérer sa couronne ?

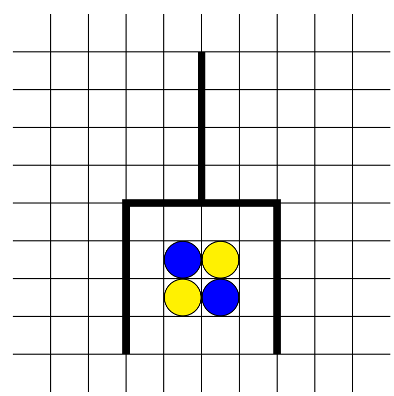
Problème 64 (L'énigme d'Einstein)

Voici un problème proposé, il y a plus d'un demi-siècle, par Albert. Selon lui, 98% de la population mondiale est incapable de le résoudre. Et vous ?
Cinq hommes de nationalités différentes habitent cinq maisons de cinq couleurs différentes. Ils fument des cigarettes de cinq marques distinctes, boivent cinq boissons différentes et élèvent des animaux de cinq espèces différentes.
La question est : « Qui élève les poissons ? ».
Voici tous les indices dont vous disposez :

1 Le norvégien habite la première maison.
2 L'anglais habite la maison rouge.
3 La maison verte est située à gauche de la maison blanche.
4 Le danois boit du thé.
5 Celui qui fume de Rothmans habite à côté de celui qui élève les chats.
6 Celui qui habite la maison jaune fume des Dunhill.
7 L'allemand fume des Malboros.
8 Celui qui habite la maison du milieu boit du lait.
9 Celui qui fume des Rothmans a un voisin qui boit de l'eau.
10 Celui que fume des Pall Mall élève des oiseaux.
11 Le suédois élève des chiens.
12 Le norvégien habite à côté de la maison bleue.
13 Celui qui élève des chevaux habite à côté de la maison jaune.
14 Celui qui fume des Philip Morris boit de la bière.
15 Dans la maison verte, on boit du café.

Problème 65 (La pelle en allumettes)

Voici une pelle formée de quatre allumettes contenant des billes :



En déplaçant deux allumettes, la pelle a exactement la même forme mais les billes se trouvent à l'extérieur. Quelles allumettes faut-il déplacer pour cela ?

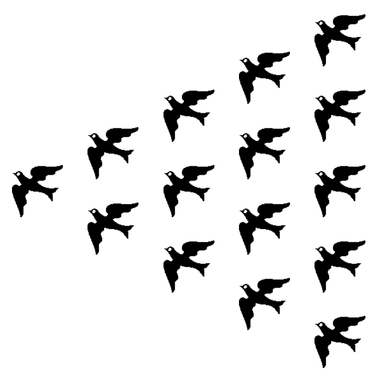
« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Étape 3

Réponses à donner pour le 14 janvier 2008

Problème 66 (À la chasse)

Un groupe d'oiseaux volait en formation serrée selon le schéma classique, et formait un triangle isocèle complet :



etc.

Ils passèrent au-dessus d'un groupe de chasseurs, qui en tuèrent dix.
Après un instant de panique, les survivants se regroupèrent en deux formations représentant chacune à nouveau un triangle isocèle complet. Ils pouvaient se partager ainsi de deux façons différentes car leur formation initiale était tout juste assez nombreuse pour cela.
Combien étaient-ils alors ?

Problème 67 (Les deux frères)

Deux frères disent toujours la vérité, sauf en ce qui concerne leur anniversaire, le jour même de ce dernier.
À la Saint Sylvestre on leur demande « Quand est votre anniversaire ? ». Le premier répond « hier », le second « demain ».
Si on leur pose la même question le 1er janvier et qu'ils font les mêmes réponses, quand tombe l'anniversaire de chacun ?

Problème 68 (Des œufs)

J'ai payé douze centimes les œufs que j'ai achetés chez l'épicier, mais comme ils étaient petits, l'épicier m'en a donné deux gratuitement. J'ai donc payé mes œufs un centime de moins par douzaine.
Combien d'œufs ai-je acheté ?

Info : les corrections des différentes étapes du rallye se trouvent sur le site du lycée

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Étape 4

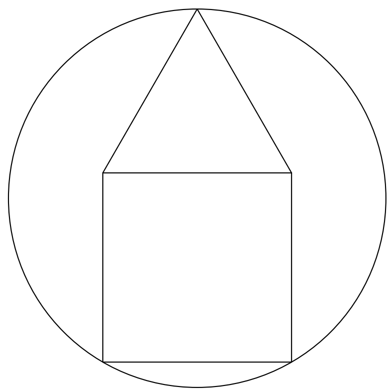
Réponses à donner pour le 4 février 2008

Problème 69 (Les cent Mafieux)

Dans un village rongé par la mafia, il y a cent habitants. Parmi eux il y a au moins un honnête homme mais si on en prend deux au hasard, il y a toujours au moins un mafieux.
Combien y a-t'il de mafieux dans le village ?

Problème 70 (Le cercle de la félicité)

Lorsque vous descendez à l'hôtel Sangaku, dans le Japon profond, on vous donne un dépliant sur lequel l'hôtel est stylisé sous la forme d'un carré de 5 cm d'arête surmonté d'un triangle équilatéral.
L'ensemble est entouré d'un cercle, qui symbolise la félicité.



Quel est le rayon du cercle de la félicité ?

Problème 71 (Le numéro du coffre)

Dans cette société, seul le directeur connaît la combinaison du coffre, qui comporte cinq chiffres.
Chacun des dix employés, pour sa part, n'a connaissance que d'un faux numéro, mais pas tout à fait choisi au hasard : un des cinq chiffres, et un seul, de sa combinaison est positionné à la bonne place.
Voici les numéros que possèdent les dix employés :

07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237, 97665

Quelle est la combinaison du coffre ?

Info : les corrections des différentes étapes du rallye se trouvent sur le site du lycée

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Étape 5

Réponses à donner pour le 24 mars 2008

Problème 72 (L'escalator)

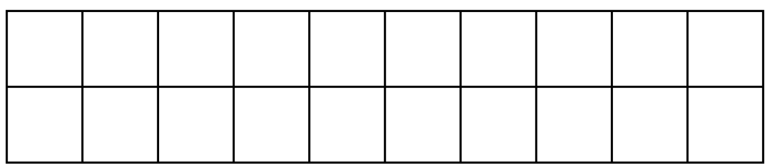
Madame Matronome monte les escaliers, même s'ils roulent, toujours à la même allure invariante : une marche par seconde. Elle atteint habituellement le sommet de l'escalator du RER en trente secondes. Ce jour-là, distraite, elle prend pour le monter l'escalier descendant (aussi lent dans la descente que dans la montée) et met deux minutes pour atteindre le sommet.
Quel est le nombre de marches de l'escalator au repos ?

Problème 73 (Le 29 février)

Le fils de dame Gertrude et Sire Baudouin est né un lundi 29 février sous le règne de Louis XIII. Quel âge aura-t-il la prochaine fois que son anniversaire tombera un lundi ?

Problème 74 (Long rectangle deviendra carré)

Voici un parchemin rectangulaire dont la longueur (L) mesure $5\,m$ et la largeur (l) mesure $1\,m$:



Comment peut-on découper ce parchemin de façon à reconstituer un carré de même surface avec les morceaux ?

Étape 6

Réponses à donner pour le 28 avril 2008

Problème 75 (Pourquoi TANT de N ?)

Si **TANT**=**(AN)(NA)** que vaut **TANT** ?

Problème 76 (Ce Gilles ! Quel Don Juan !)

Quatre hommes et quatre femmes sont chacun amoureux d'une autre personne d'un groupe de huit. Chacune d'entre elles n'est aimée que d'une seule personne. Jean aime la femme qui malheureusement aime Gilles. Arthur aime la femme qui aime l'homme qui aime Hélène. Marie est aimée par l'homme aimé par la femme aimée par Bernard. Gisèle déteste Bernard et n'est pas aimée par l'homme aimé par Henriette.
Qui aime Arthur ?

Problème 77 (Jeu à trois)

Trois compères, Martin, Eberulf et Léandre terminent un jeu qui s'est déroulé en cinq manches. Ils ont toujours misé avec des pièces de un denier et n'ont donc eu, au cours de la partie, que des sommes entières.
À chaque manche, le perdant a doublé les avoirs des deux autres. À la fin de la partie, Martin a huit deniers, Eberulf en a neuf et Léandre en a dix.
Combien chacun avait-il de deniers au début du jeu ?

Le rallye du lycée François 1^{er}

Année scolaire

2004 2005

Les corrigés

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 1

Problème 1

L'affirmation de A est certainement vraie. S'il mentait, il devrait être à la fois dernier et premier ou second. A **est donc troisième ou quatrième**.
Si l'affirmation de D est vraie, E ment et D, premier, doit mentir. D est donc premier ou second et ment. E **n'est pas second**.
Si E ment, D est premier et E est second. Comme ce n'est pas possible, E dit vrai et est troisième, quatrième ou cinquième. D**, n'étant pas premier, est second**.
Seuls B ou C peuvent être premiers. Si B ne l'est pas, C est troisième, et ne peut l'être non plus. B **est donc premier et** C **n'est pas troisième**.
C, n'étant pas l'un des deux premiers, dit la vérité et A est derrière E. E **est donc troisième,** A **quatrième et** C **cinquième**.
L'ordre est par conséquent B, D, E, A et C.

Problème 2

Il suffit de trois pièces.
On commence par faire trois paquets de neuf pièces.
Par une première pesée on compare les poids des deux premiers paquets :
– s'ils sont égaux, on sait que la fausse pièce est dans le troisième paquet ;
– si la balance penche d'un côté, on sait au contraire qu'elle est dans le paquet le plus léger des deux.
Dans tous les cas, on sait dans quel paquet de neuf pièces se trouve la fausse, et on réitère alors le procédé : avec ces neuf pièces restantes, on fait trois paquets de trois pièces, et par une deuxième pesée, on détermine comme précédemment dans quel paquet de trois la fausse pièce se trouve.
Il nous reste trois pièces, et il suffit d'en comparer deux d'entre elles pour finalement déterminer la fausse pièce.

Problème 3

Les lignes droites partagent cette figure en 11 cases élémentaires. Comptons les triangles selon le nombre de cases qu'ils occupent :

1 case	10
2 case	10
3 cases	10
5 cases	5
total	35

$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er} Correction de l'étape 2

Problème 4

La réponse est oui.

On numérote les affirmations dans l ordre de 1 à 7.
D'après 3 et 7, Casimir est tigré.
On déduit de 2 qu'il est futé, puis de 5 qu'il est du quartier.
1 implique alors qu'il mange dans la gamelle du chien, et donc qu'il est compagnon de jeu du chien (grâce à 6).
On conclut par 4 que Casimir aime les os à moelle.

Problème 5

Il y a 19 caramels dans le bocal.

D'après la première affirmation il y a trois types de couleur pour les papillotes. On peut par exemple supposer que la troisième couleur est le rouge. Notons r, b et v les nombres respectifs de caramels enveloppés de papillotes de couleur rouge, bleue et verte.
D'après la deuxième affirmation, le plus grand de ces trois nombres est égal à 11.
D'après la troisième affirmation, il y a 8 caramels qui ne sont pas enveloppés d une papillote bleue. On en déduit que c'est b qui vaut 11, et donc que $r + v = 8$. Ainsi le nombre total de caramels est $b + r + v = 11 + 8 = 19$.

Remarque : on n a pas besoin de la dernière affirmation (ni de la première en fait), qui permet en revanche de conclure que $r = 3$ et $v = 5$.

Problème 6

La rivière coule à $3\,km/h$.

Si le concurrent rame pendant dix minutes après avoir perdu sa casquette, il lui faudra dix autres minutes pour retourner vers elle (le courant ne joue aucun rôle : il agit de même sur la casquette et sur le canöe).
En 20 minutes la rivière a porté la casquette sur un kilomètre. Elle coule donc à $3\,km/h$.

$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\triangleleft$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er
Correction de l'étape 3

Problème 7

La réponse est 3.

$2005 = 286 \times 7 + 3$ donc $2005^2 = (286 \times 7)^2 + 6 \times (286 \times 7) + 3^2$ et le reste de la division de 2005^2 par 7 est le même que celui de 3^2, c'est-à-dire 2. De même 2005^3 a le même reste que $3^3 = 27$, et ainsi de suite jusqu'à 2005^6 qui a le même reste que $3^6 = 729$; or $729 = 7 \times 104 + 1$, donc le reste de 2005^6 par 7 vaut 1, et ce sera donc aussi le cas de toutes les puissances de 2005^6.
Donc pour tout entier n de la forme $n = 6 \times k$ avec $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division de 2005^n par 7 est égal à 1 ; en effet : $(2005)^{6\times k} = (2005^6)^k$. C'est vrai en particulier pour $n = 2004 = 6 \times 334$, donc finalement le reste de la division par 7 de $2005^{2005} = 2005^{2004} \times 2005$ est égal à $1 \times 3 = 3$.

Problème 8

La réponse est 72 ans.

Il y autant de côtés que d'angles au centre. Notons n leur nombre. Chaque angle au centre mesure $180 - 175 = 5$ degrés. comme la somme de ces n angles vaut 360 degrés, on en déduit que $n = \frac{360}{5} = 72$. Donc l'âge cherché est 72 ans.

Problème 9

La réponse est 1 000 mètres

On peut résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues, ou remarquer que chaque partie du périmètre cherché est parcourue exactement trois fois lorsqu'on fait les quatre tours de deux pâtés de maison, donc que le périmètre vaut le tiers de la somme $600 + 700 + 800 + 900 = 3000$, c'est-à-dire 1000 mètres.

$\int_a^b f(t)dt$ $\quad 2 \quad$ $\triangleleft$ $\quad \mathbb{R} \quad$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 5

Problème 13

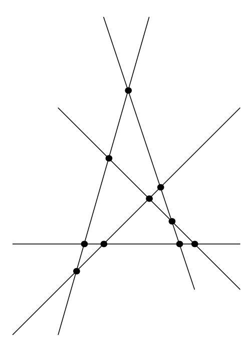
Appelons X le nombre de gares existant auparavant et Y le nombre de gares nouvelles. À chaque gare nouvelle correspond :
– les tickets pour les gares anciennes, soit : X ;
– les tickets des gares anciennes vers elle, soit X ;
– les tickets pour les autres gares nouvelles, soit $Y - 1$.
Chaque gare nouvelle vend donc $2X + Y - 1$ tickets nouveaux.
Comme il n'y a pas d'autres tickets nouveaux que les précédents, on obtient leur nombre total en multipliant par le nombre de gares nouvelles : $Y(2X + Y - 1) = 34$.
Les deux nombres de gauche, Y et le nombre entre parenthèses, sont des nombres entiers qui divisent 34. Y ne peut donc être égal qu'à 1, 2, 17 et 34. 1 est exclu, car il y a plusieurs gares nouvelles. Si Y vaut 17 on a $2X+17-1 = 2$, c'est-à-dire $2X + 14 = 0$. Or, X ne peut être un nombre négatif. De même Y ne peut valoir 34 car $2X + 34 - 1 = 1$ donnerait un X négatif également.
Une seule solution convient, $Y = 2$ et $X = 8$. Il y avait 8 gares auparavant. Il y en a deux nouvelles.

Problème 14

Examinons ce qui se passe pendant les douze premières heures. La grande aiguille est superposée à la petite au début de la première heure, et ne la croise plus pendant au moins une heure.
De même, au cours de la dernière heure, la grande aiguille n'a pas croisé la petite, et ne s'y superpose qu'au dernier instant, lorsqu'elle la rattrape.
Par contre, la grande aiguille croise la petite au cours de chacune des dix heures intermédiaires.
Au total, les deux aiguilles se sont superposées douze fois. Ces douze superpositions sont séparées par onze intervalles. Pendant chacun de ces intervalles, les aiguilles font deux fois un angle droit, car le parcours de la grande aiguille fait environ onze douzièmes de tour.
Il y a donc 22 angles droits en douze heures, et 44 angles.

Problème 15

Il suffit de tracer cinq droites sécantes de façon qu'aucun point soit situé sur trois de ces droites. On positionne alors les arbres aux intersections des droites :



Rallye de Mathématiques du Lycée François 1^{er} Correction de l'étape 6

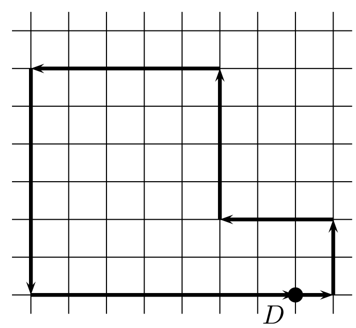
Problème 16

1 Comme les épreuves 1, 2, 3 et 4 sont incompatibles deux à deux, il faut au minimum 4 jours. Or on trouve facilement une organisation en 4 jours, par exemple :
Jour 1 : épreuves 1 et 5 ; Jour 2 : épreuves 3 et 6 ; Jour 3 : épreuve 2 ; Jour 4 : épreuve 4.

2 Il y a une erreur dans le tableau puisqu il n est pas symétrique : on déplace donc par exemple à la ligne 2 la croix de la colonne 5 par une croix dans la colonne 6.
Les épreuves 2, 3, 4 et 6 étant incompatibles deux à deux, il faut au minimum 4 jours, et on trouve à nouveau facilement une organisation en 4 jours, par exemple :
Jour 1 : épreuves 1 et 3 ; Jour 2 : épreuves 2, 5 et 7 ; Jour 3 : épreuve 4 ; Jour 4 : épreuve 6.

Problème 17

Les déplacements horizontaux de la puce (mesurés en unité du réseau quadrillé) sont de longueur 1, 3, 5, 7, etc. tandis que les déplacements verticaux sont de longueur 2, 4, 6, 8, etc.
Il lui faut au moins quatre déplacements horizontaux pour revenir à son point de départ, car aucune combinaison de 1, 3 et 5 avec des plus ou des moins ne donne zéro. En revanche 1-3-5+7=0, et comme on a aussi 2+4-6=0, on voit qu en 7 sauts la puce peut revenir à son point de départ, et c est le nombre minimum de sauts :



Problème 18

Appelons Alfred, Bob et Charly les trois individus. Charly tient le raisonnement suivant : supposons que mon chapeau est noir. Si Alfred avait eu un chapeau noir lui aussi, alors Bob aurait vu deux chapeaux noirs et n aurait pas levé la main : comme il a levé la main, Alfred devrait donc en déduire qu il a lui-même un chapeau blanc. (notons que par le même raisonnement, Bob aussi devrait parvenir à la même conclusion). Mais comme au bout de quelques instants personne n a toujours rien dit, c est donc que l hypothèse de départ est fausse : le chapeau de Charly n est pas noir, mais blanc.

$\int_a^b f(t)dt$ 2 $\lhd$ $\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Le rallye du lycée François 1er

Année scolaire

2005 2006

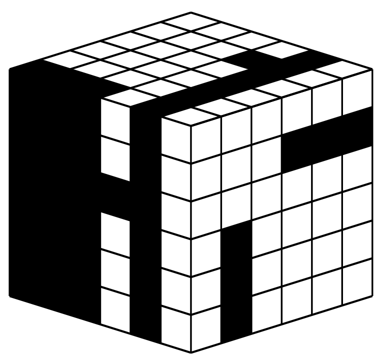
Les corrigés

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 1

Problème 22

1 Le cube possède 389 petits cubes blancs. En effet :
  (a) Il y a $8^3 = 512$ cubes.
  (b) De l'avant à l'arrière : $5 \times 8 = 40$ cubes noirs.
  (c) De haut en bas : $6 \times 8 = 48$ cubes noirs dont 7 communs, soit 41 cubes.
  (d) De gauche à droite : $6 \times 8 = 48$ cubes noirs dont 6 communs, soit 42 cubes noirs.
  (e) On obtient donc $40 + 41 + 42 = 123$ cubes noirs et $512 - 123 = 389$ cubes blancs.

2 On obtient le cube suivant :



Problème 23 (Une histoire de pieds)

Le tiers des moutons est ramené au bercail donc deux tiers des moutons restent dans le pré, soit dix moutons donc quarante pieds.
Il ne reste plus que cinquante pieds dans le pré dont quarante pieds de mouton : il y a donc cinq bergers dans le pré ($2 \times 5 = 10$).
Cinq bergers représentent la moitié des bergers donc il y avait au début dix bergers et quinze moutons dans le pré. Soit $60 + 20 = 80$ pieds.

Problème 24 (Les chiffres récurrents)

– solution sans le chiffre zéro : $15 \times 93 = 1\,395$;
– solutions avec le chiffre zéro : $21 \times 60 = 1\,260$, $30 \times 51 = 1\,530$ et $80 \times 86 = 6\,880$;
– autres « pseudo-solutions » : $00 \times 00 = 0\,000$, $03 \times 51 = 0\,153$, $06 \times 21 = 0\,126$ et $08 \times 86 = 0\,688$.
Pour obtenir rapidement la solution possible ne comportant pas de zéro, on pouvait écrire un programme effectuant les multiplications successives. Par exemple :

```
program question3;
type tableau = array[1..4] of integer;

var i,j,k,l,m :integer;
    t1 , t2 : tableau;
    a,b,c : integer;

procedure traitement(t1,t2:tableau);
var tt1,tt2:tableau;

procedure trier(t1:tableau;var t2:tableau);
var i,j,k : integer;
begin
t2[1]:=t1[1];
 for i:=2 to 4 do
  begin
   j:=1;
   while (t1[i]>t2[j]) and (j<i) do j:=j+1;
   if j=i then t2[j]:=t1[j]
          else begin
                for k:=i-1 downto j do t2[k+1]:=t2[k];
                t2[j]:=t1[i];
               end;
  end;
end;

function comparaison(t1,t2 : tableau):boolean;
var flag : boolean;
    i : integer;
begin
 flag:=true;
 i:=1;
 while flag and (i<5) do
  begin
   if t1[i]<>t2[i] then flag:=false;
   i:=i+1;
  end;
 comparaison:=flag;
end;

procedure afficher(t1,t2: tableau);
var i : integer;
begin
 write(t1[1],t1[2],'*',t1[3],t1[4],'=');
 for i:=1 to 4 do write(t2[i]);
 writeln;
end;

begin
 trier(t1,tt1);
 trier(t2,tt2);
 if comparaison(tt1,tt2) then afficher(t1,t2);
end;

begin
 for i:=1 to 9 do
  begin
   t1[1]:=i;
   for j:=1 to 9 do
```

```
    begin
     t1[2]:=j;
     a:=10*i+j;
     for k:=i to 9 do
      begin
       t1[3]:=k;
       for l:=1 to 9 do
       begin
        t1[4]:=l;
        b:=k*10+l;
          c:=a*b;
            for m:=1 to 4 do
             begin
              t2[5-m]:=c-10*trunc(c/10);
              c:=trunc(c/10);
             end;
             traitement(t1,t2);
           end;
        end;
    end;
  end;
  readln();
end.
```

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 2

Problème 25 (La chevelure des parisiennes !)

C'est une application du très sérieux principe des tiroirs. Voilà comment procéder. On prend les 400 000 premières femmes. Au pire, elles ont toutes un nombre différent de cheveux, on les range donc dans « un tiroir » étiqueté par leur nombre de cheveux. Prenons maintenant la 400 001^{e}. Comme tous les tiroirs sont déjà occupés, elles seront deux au moins à posséder le même nombre de cheveux. Au pire encore, toutes les femmes entre 400 001 et 800 000 ont un nombre différent de cheveux, et elles seront deux dans chaque tiroir. Toujours en raisonnant ainsi, pour classer jusque 1 200 000, on en met trois dans chaque tiroir, puis jusque 1 500 000, 4 dans 300 000 tiroirs, et 3 dans les 100 000 autres.
Il y a donc au moins 4 femmes à Paris qui ont le même nombre de cheveux !

Problème 26 (Une histoire de chocolats)

Si on désigne par N le nombre de personnes interrogées, par P le nombre de personnes qui achètent des chocolats au pralin, par C le nombre de personnes qui achètent des chocolats à la crème, par D le nombre de personnes qui achètent les deux et par R le nombres de personnes qui n'achètent pas de chocolats, alors les quatre propositions se traduisent respectivement par :

- $\dfrac{1}{3}N = P$;
- $D = 500$;
- $\dfrac{1}{4}N = R + (P - D)$;
- $\dfrac{1}{12} = R$.

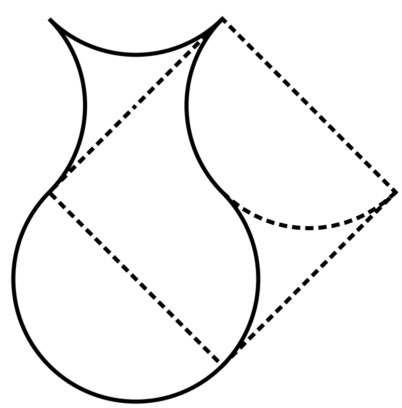
En remplaçant P, D et R par leur expression en fonction de N dans la troisième égalité on obtient :

$$\frac{1}{4}N = \frac{1}{12}N + \frac{1}{3}N - 500.$$

On obtient ainsi $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}\right) N = 500$, soit $N = \dfrac{12}{2} \times 500 = 3\,000$.
Il y a 3 000 personnes interrogées.

Problème 27 (Un petit vase)

On obtient la construction suivante :



Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er
Correction de l'étape 3

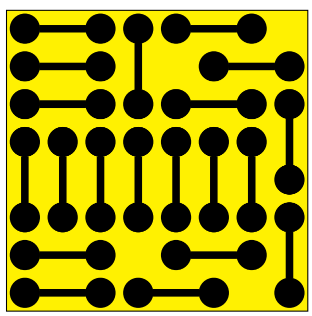
Problème 28 (Gratte-ciel)

On obtient la représentation suivante :

	1		3		
	40	30	20	10	
	10	20	30	40	
	30	40	10	20	2
2	20	10	40	30	
	3		1		

Problème 29 (Haltères)

On obtient la configuration suivante :



Problème 30 (Logique)

On obtient le tableau suivant :

Chasseur	**Gibier tué**	**Gibier raté**
Biche	Cerf	Lièvre
Cerf	Lièvre	Chevreuil
Lièvre	Chevreuil	Sanglier
Sanglier	Biche	Cerf
Chevreuil	Sanglier	Biche

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 4

Problème 31 (Saint Valentin)

		Femmes				
		Ang	Fra	Gre	Ita	Sue
Hommes	Ang					×
	Fra				×	
	Gre	×				
	Ita			×		
	Sue		×			

Problème 32 (Carré palindromique)

Désignons par $ABCCBA$ le carré cherché et par abc sa racine carrée. Le dernier chiffre A de $ABCCBA$ est 1, 4, 5, 6 ou 9. Faisons varier A. Connaissant A, on connaît le dernier chiffre c de sa racine abc (une ou deux valeurs possibles), mais aussi le premier chiffre a. De par son architecture, le nombre $ABCCBA$ est divisible par 11 et donc aussi sa racine carrée abc. Connaissant a et c, b se déduit facilement : b est égal à $(a+c)$ ou à $(a+c-11)$. En faisant varier A, on obtient la table de tests suivante :

A	a	c	Valeurs possibles pour $abc = 11n$
1	3 ou 4	1 ou 9	$341; 319; 451; 429$
4	6 ou 7	2 ou 8	$682; 638; 792; 748$
5	7	5	715
6	7 ou 8	4 ou 6	$704; 726; 814; 836$
9	9	3 ou 7	$913; 957$

Soit quinze valeurs de abc à tester. La solution est obtenue pour $abc = 836$ dont le carré $698\,896$ est bien symétrique.

Problème 33 (Gratte-ciel (suite))

		4					
	20	30	50	60	10	40	
2	30	10	60	50	40	20	4
2	50	20	10	40	60	30	
	10	40	20	30	50	60	
	60	50	40	20	30	10	5
	40	60	30	10	20	50	
			3	6		2	

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 5

Problème 34 (Mais où est passé l'argent ?)

Les faits : les fermière croyaient calculer une sorte de prix moyen pour cinq pommes, noté P_{5m}. Mais, elles n'ont pas pris la précaution de passer par un prix unitaire, noté P_u. Voici ce qu'il fallait faire :
$P_{u\text{ moyen}} = \dfrac{p_{u1} + p_{u2}}{2} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{25}{12} \approx 2,083.$
Ainsi le prix moyen pour cinq pommes est alors $P_{5m} = 5 \times \frac{25}{12} \approx 10,416$ €.
Elles ont donc fait « cadeau » de plus de 41 centimes par demi-dizaine de pommes.
La morale : c'est une preuve de plus que la culture des pommes ne rentre pas dans la P.A.C. Si ça avait été le cas, il est évident que les fermières auraient été plus douées en comptabilité.

Problème 35 (Un petit problème de carrelage)

Quand le rapport $\dfrac{l}{L}$ n'est pas simplifiable, le nombre de carreaux traversés est égal à $(L + l) - 1$.
Les nombres 93 et 231 sont divisibles par 3 : $93 = 3 \times 31$ et $231 = 3 \times 77$. On peut donc raisonner sur un rectangle de 31x77 puisque le rapport $\frac{31}{77}$ n'est pas simplifiable. Cela donne $(31 + 77) - 1 = 107$. Pour un rectangle de 31x77 carreaux, 107 carreaux sont donc traversés.
Pour un rectangle de 231x93 carreaux, la ligne traverse 3 rectangles de taille 31x77 : $107 \times 3 = 321$.
La ligne traverse donc 321 carreaux.

Problème 36 (L'Île du Pendu)

Désignons par C, P et E le chêne, la potence et l'érable (toute ressemblance avec un sujet d'actualité brûlante étant purement fortuite...).
Notons P_1 et P_2 les deux pieux obtenus à partir de P comme indiqué sur le parchemin. Pour un autre point R (différent de C et E), notons R_1 et R_2 les pieux obtenus.
Il s'agit de montrer que le milieu de $[R_1R_2]$ est le même que celui de $[P_1P_2]$.

Puisque (P_1R_1) et (P_2R_2) sont les images de (PR) par des rotations d'angle droit, les deux droites sont toutes deux perpendiculaires à (PR), donc sont parallèles. De plus, $P_1R_1 = PR = P_2R_2$. Enfin, comme la première rotation est directe et l'autre indirecte, les vecteurs $\overrightarrow{P_1R_1}$ et $\overrightarrow{P_2R_2}$ sont de sens opposés. On en déduit que $\overrightarrow{P_1R_1} = \overrightarrow{R_2P_2}$, ce qui prouve que $P_1R_1P_2R_2$ est un parallélogramme, et donc que ses diagonales $[P_1P_2]$ et $[R_1R_2]$ se coupent en leur milieu.

En conclusion, la construction est indépendante de la position de la potence : on peut en particulier partir du milieu I de $[CE]$, et on trouve alors facilement que le trésor est sur la médiatrice de $[CE]$, à une distance de I égale à $CI = IE = \dfrac{CE}{2}$.

Rallye de Mathématiques du Lycée François 1er Correction de l'étape 6

Problème 37 (Salaire spécial)

Notons S le salaire cherché. Les hypothèses équivalent à dire que $S+1$ est divisible par tous les entiers entre 2 et 9, ce qui équivaut à ce que le plus petit multiple commun (ppcm) de ces nombres, qui vaut $9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2\,520$, divise $S+1$. Comme par ailleurs $S < 3\,000$, la seule solution est $S+1 = 2\,520$, d'où

$$S = 2\,519 \text{ €}.$$

Problème 38 (La hauteur de la cuve)

Le deuxième niveau (à une hauteur de $80\,cm$) est atteint au bout de $20 + 20 \times \frac{1}{2} = 30$ minutes, et plus généralement le $n-$ième niveau (à une hauteur de $n \times 20\,cm$) l'est après $T_n = 20 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ minutes. Pour $n = 6$, on trouve $T_6 = 49$ minutes.
Il reste donc encore une minute pendant laquelle 7 tuyaux sont ouverts : pendant ce laps de temps, ils remplissent $7 \times 2 = 14\,cm$ supplémentaires.
Finalement au bout de 50 minutes, la cuve s'est remplie de $40 \times 6 + 14 = 254\,cm$, et on en conclut que la hauteur h de la cuve est :

$$h = 254 + 16 = 270\,cm.$$

Problème 39 (Carré latin de dominos)

Une solution possible parmi d'autres :

4	1	0	2	6	3
2	3	6	4	1	5
3	4	1	0	5	6
0	6	4	5	2	1
6	2	5	3	0	4
5	0	3	1	4	2

Le rallye du lycée François 1^{er}

Année scolaire

2006 2007

Les corrigés

Correction petit tour de chauffe

Problème 40

Le mot indication pourrait convenir... mais l'indication donnée dans l'énoncé indique que ce n'est pas le bon mot !
Les mots obligation et incubation conviennent.
Peut-être en avez-vous trouvés d'autres ?

Problème 41

N'importe quel nombre de trois chiffres possédant les deux premières propriétés possède en fait aussi la troisième, qui n'apporte donc aucune nouvelle contrainte !
En effet si on désigne par x le chiffre des unités d'un tel nombre, ce nombre vaut $100(x-4)+70+x$, et le nombre avec les chiffres inversés vaut $100x+70+x-4$. La différence entre ces deux nombres vaut donc :

$$100x+70+x-4-\Big(100(x-4)+70+x\Big)=400-4=396\ .$$

On remarque que le chiffre des dizaines n'a aucune importance dans ce calcul : ainsi, tout nombre de trois chiffres possédant la deuxième propriété vérifie aussi la troisième.

Problème 42 (Muséum)

On obtient la grille suivante :

6	2	7	4	3	4
7	2	8	4	3	2
6	3	6	4	4	2
7	4	6	4	4	2
6	4	7	6	5	4
6	4	9	7	4	2

Problème 43 (Écrits vains)

1. **Beauvoir**, (Belle vision)
2. **Duras**, (Coriace, la première carte)
3. **Sagan**, (Elle lui appartient, la mitaine)
4. **Vian**, (Existe 365 jours)

5. **Montherlant**, (La colline troisième n'est pas rapide)
6. **Camus**, (La onzième lettre change de voix)
7. **Sarraute**,
(La région frontalière de l'Allemagne est invitée)
8. **Robbe-Grillet**, (La soutane brûlait)
9. **Aragon**, (Le perroquet charnière)
10. **Malraux**, (Mauvais rôti)
11. **Jardin**, (On le prend pour une oie, ce cervidé)
12. **Houellebecq**, (Où se trouve la bouche de l'oiseau ?)

H. **Le deuxième sexe**, (Le second zizi)
B. **L'Amant**, (L'Amoureux)
L. **Bonjour tristesse**, (Salut chagrin)
E. **L'Automne à Pékin**,
(La troisième saison dans la capitale asiatique)
D. **La reine morte**, (La souveraine décédée)
A. **L'Étranger**, (L'allochtone)
G. **Le Planétarium**, (Le musée des étoiles)

I. **La Jalousie** (Le store vénitien)
K. **La semaine sainte**, (Les sept jours bénis)
C. **La Voie royale**, (La piste des rois)
F. **Le Zèbre**, (Le cheval en pyjama)
J. **Les particules élémentaires**, (Les atomes primitifs).

Problème 44 (Logique)

Notons A_i l'affirmation contenue sur le coffre de numéro i.
Si A_1 était vraie, alors l'or serait dans le coffre 1, ce qui est contradictoire avec A_1. Ainsi A_1 est fausse, donc l'or n'est ni dans le coffre 2 ni dans le coffre 3, et A_2 et A_3 sont donc fausses. En particulier, le bronze est donc dans le coffre 3, et l'or se trouve dans le coffre 4 ou 5.
Si l'or était dans le coffre 4, alors A_4 serait vraie et le nickel serait dans le coffre 3, ce qui est faux (on vient de voir que le coffre 3 contient le bronze). Ainsi l'or est dans le coffre 5, A_5 est vraie et le platine est dans le coffre 4.
Comme l'argent n'est pas dans le coffre 1 (puisque A_2 est fausse), il est dans le coffre 2 et le coffre 1 contient donc le dernier lingot restant : le nickel.

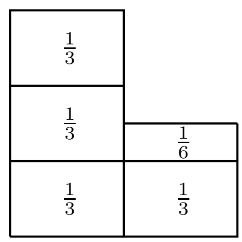
En conclusion, le contenu des coffres est le suivant :

Coffre1	**Coffre2**	**Coffre3**	**Coffre4**	**Coffre5**
Nickel	Argent	Bronze	Platine	Or

Correction de la deuxième étape

Problème 45 (L'équipe des faucheurs)

S'il a fallu une demi-journée à l'équipe entière, plus une demi-journée à la moitié de l'équipe pour faucher entièrement le grand pré, il est clair qu'en une demi-journée, la moitié de l'équipe fauchait $\frac{1}{3}$ du pré. Par suite, sur le petit pré il restait une aire non fauchée de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Sachant qu'un ouvrier a fauché en un jour $\frac{1}{6}$ du pré, et qu'en tout on a fauché $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, il en résulte que l'équipe comprenait 8 faucheurs.
On peut représenter la situation avec la figure suivante :

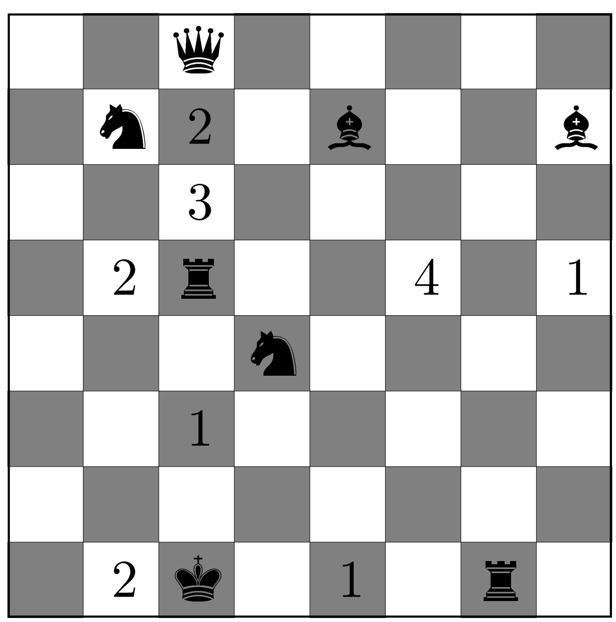


Problème 46 (BAT-BIGA-HIRU)

On obtient le tableau suivant :

ZORTZI (=8)	BAT (=1)	SEI (=6)
HIRU (=3)	BOST (=5)	ZAZPI (=7)
LAU (=4)	BEDERATZI (=9)	BIGA (=2)

Problème 47 (Place the pieces)

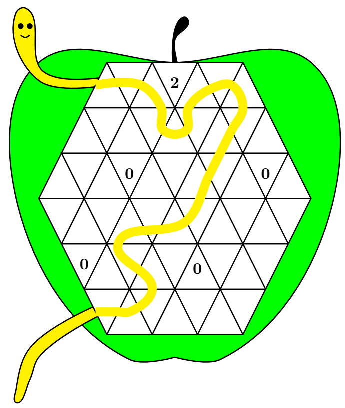


« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er

Correction de la troisième étape

Problème 48 (TRA-VERS)



Problème 49 (AUTO-COMMENTAIRE)

A	3	1	1	3	1	1	2	2	2	1
B	1	3	2	1	1	3	2	1	3	2
C	1	1	1	3	1	2	2	1	1	3

Problème 50 (LES MONTRES)

On obtient 7 H 40

Correction de la quatrième étape

Problème 51 (File d'attente)

Notons a, b, c, d, e les âges des cinq personnes, dans l'ordre de la file. Les hypothèses se traduisent par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a+b & = & 110 \\ 3b+c & = & 110 \\ 3c+d & = & 110 \\ 3d+e & = & 110 \end{array}\right.$$

On en tire l'équation suivante : $81a - e = 110(27 - 9 + 3 - 1) = 2\,200$. Puisque $2\,200 = 81 \times 27 + 13$, on en déduit que $81(a - 27) = e + 13$. Ainsi $e + 13$ est un multiple de 81 ; comme c'est un entier compris entre 13 et 123 (en effet $e \leqslant 110$ d'après la dernière équation du système), on a donc nécessairement $e + 13 = 81$, d'où $a - 27 = 1$, et $a = 28$.
La première personne de la file a donc 28 ans.
Remarque : on en déduit alors que les quatre âges suivants sont $26, 32, 14$ et 68 ans.

Problème 52 (Le problème d'Euler)

Supposons que la seconde paysanne avait k fois plus d'œufs que la première. Elles ont reçu les mêmes sommes ; cela veut dire que la première paysanne vendait ses œufs k fois plus cher que la seconde. Si elles avaient échangé leurs œufs avant la vente, la première aurait eu k fois plus d'œufs qu'elle aurait vendus k fois plus cher. Elle aurait donc reçu k^2 fois plus d'argent que la seconde. Par suite, nous avons $k^2 = 15 : \frac{20}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$ d'où $k = \frac{3}{2}$.
Il ne reste qu'à prendre les $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ de 100 œufs, et on trouve immédiatement que la première paysanne avait 40 œufs et la seconde, 60.

Problème 53 (Eubani)

La séquence est constituée par les premiers nombres entiers qui s'écrivent sans la lettre e. Les trois nombres qui la prolongent sont $1\,000\,000$, $1\,000\,001$ et $1\,000\,003$.

Correction de la cinquième étape

Problème 54 (Cadenas)

Le plus petit nombre dont la somme des chiffres vaut 27 est 999.
Multiplions le par 27. On obtient 26 973 dont la somme des chiffres vaut 27.
Multiplions ce nombre par 27. On obtient 728 271 dont la somme des chiffres vaut aussi 27.
26 973 est donc la plus petite combinaison possible.

Par programme :
– examinons les nombres supérieurs à 999 et inférieurs à $\frac{100\,000}{27}$;
– gardons ceux dont la somme des chiffres est égale à 27 ;
– multiplions les par 27 et gardons ceux dont la somme des chiffres est de nouveau 27 ;
– multiplions les par 27 et gardons ceux dont la somme des chiffres est de nouveau 27.
Il ne reste que trois autres nombres correspondant aux combinaisons 53 946, 80 676 et 80 919.

Il y a donc quatre combinaisons possibles : 26 973, 53 946, 80 676 et 80 919.

Problème 55 (La vapeur et le radeau)

Désignons par x le temps (en heures) nécessaire pour que le vapeur parcoure la distance de A à B en l'absence de courant (c'est-à-dire avec la vitesse propre), et par y le temps que met un radeau pour parcourir la même distance. En une heure le vapeur franchit $\frac{1}{x}$ de la distance AB, et le radeau $\frac{1}{y}$. Par suite, le vapeur fait à l'heure $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ de la distance AB en descendant le courant et $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ en le remontant. Or on sait qu'en descendant le courant le vapeur fait à l'heure $\frac{1}{5}$ de la distance AB, et en remontant , $\frac{1}{7}$ de cette distance. Nous obtenons les équations $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7} \end{cases}$.
Notons que pour résoudre ce système, il n'est pas nécessaire de chasser les dénominateurs ; il suffit de soustraire la seconde équation de la première, et on obtient : $\frac{2}{y}=\frac{2}{35}$, d'où $y=35$.

Un radeau met 35 heures pour aller de A à B.

Problème 56 (Le chat et la souris)

Le chat est à 7 bonds du trou et la souris à 20 pas.
Comme 7 bonds correspondent à 21 pas alors la souris aura juste le temps de rentrer avant de se faire rattraper.

Le rallye du lycée François 1er

Année scolaire

2007 2008

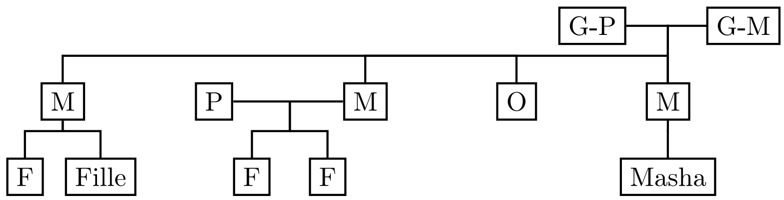
Les corrigés

« TOURNEZ MÉNINGES »

le rallye du lycée François 1er
Correction petit tour de chauffe

Problème 57 (Un anniversaire russe)

On a l'arbre généalogique suivant :



On a donc onze invités.

Problème 58 (Bon anniversaire Boris)

Boris est né en $19x$ et son grand-père en $18y$, où x et y sont des nombres à deux chiffres. En 1932, l'âge de Boris est $32 - x$, et vaut aussi x par hypothèse, d'où $32 - x = x$ et $x = 16$.
Quant à son grand-père, son âge en 1932 est $32 + (100 - y)$, et vaut aussi y, d'où l'équation $132 - y = y$, qui donne $y = 66$.
Conclusion : Boris a seize ans et son grand-père soixante-six.

Problème 59 (SUDOKU)

On obtient la grille suivante :

2	4	5	3	1	6
5	3	4	1	6	2
3	5	1	6	2	4
4	1	6	2	3	5
1	6	2	4	5	3
6	2	3	5	4	1

Correction de la première étape

Problème 60 (Arithmétique et ecclésiastique)

Puisque $2450 = 2 \times 25 \times 49$, les décompositions possibles de 2450 en produit de trois âges (raisonnables) sont : $(2, 25, 49)$, $(2, 35, 35)$, $(2, 7, 105)$, $(5, 5, 98)$, $(5, 14, 35)$, $(5, 10, 49)$, $(5, 7, 70)$, $(7, 7, 50)$, $(7, 10, 35)$ et $(7, 14, 25)$.
Les sommes possibles sont donc (dans l'ordre précédent) : $76, 72, 114, 108, 54, 64, 82, 64, 52$ et 46.
Puisque le bedeau ne peut pas répondre à la seconde affirmation, nécessairement son âge est la seule somme apparaissant deux fois dans la liste précédente : 64. Les trois âges sont donc $(5, 10, 49)$ ou bien $(7, 7, 50)$. La dernière indication du curé permet de lever l'ambiguïté : en effet si le curé avait moins de 49 ans, le bedeau ne pourrait rien en conclure ; puisqu'il peut répondre, c'est donc que le curé a 49 ans et que la paroissienne la plus âgée a 50 ans.
En conclusion les âges des paroissiennes sont 7 ans, 7 ans et 50 ans.

Problème 61 (Alice au pays des mensonges)

Il s'agit du jeudi. Le lion dit la vérité en affirmant qu'il a menti le mercredi, tandis que la licorne ment en disant qu'elle a menti la veille.

Problème 62 (Quand y en a pour deux, y en a pour trois)

Si on découpe les 8 petits pains en trois parts chacun, il y a 24 parts au total, et chacun des trois personnages récupère donc 8 parts. Le chasseur paie 8 dinars pour ces 8 parts, donc une part coûte 1 dinar. Le premier berger a apporté 9 parts et en récupère 8 seulement, il doit donc récupérer 1 dinar. Quant au second berger, il a apporté 15 parts et en a récupéré 8, donc doit récupérer 7 dinars.
En conclusion, des 8 dinars du chasseur, le premier berger en prend 1 et le second en prend 7.

Problème 63 (Le roi Dagobert)

On obtient la séquence suivante :

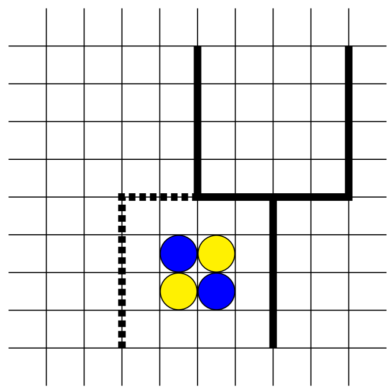
1 - 7 - 3 - 2 - 1 - 1 - 1 -2 - 1 - 1

Problème 64 (L'énigme d'Einstein)

C'est l'allemand qui élève les poissons, boit du café, fume des « Marlboros » et habite la maison verte.

Problème 65 (Les allumettes)

On obtient la figure suivante :



Correction de la troisième étape

Problème 66 (À la chasse)

De par leur position initiale, les oiseaux pouvaient être au nombre de 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, etc.
10 sont tués. Il en reste suivant le cas 5, 11, 18, 26, 35, 45, 56, 68, 81, etc. La première solution possible pour que les oiseaux reforment deux triangles équilatéraux avec choix est qu'il en reste 81 volant par groupes de 78 et 3 ou 66 et 15.
Ils étaient donc 91 oiseaux initialement.

Problème 67 (Les deux frères)

Si le premier frère dit la vérité le 31 décembre, alors il est né le 30 décembre et devrait donc dire la vérité le 1er janvier, ce qui est contradictoire puisqu'il affirme ce jour-là être né le 31 décembre. Par conséquent, le premier frère ment le 31 décembre, et est donc né ce jour-là, ce qui est cohérent avec son affirmation du lendemain.
De même, si le second frère dit la vérité le 1er janvier, il est né le 2 janvier, et aurait dû dire la vérité le 31 décembre, or il affirme ce jour-là être né le 1er janvier. Ainsi, il ment le 1er janvier, et est donc né ce jour-là, en accord avec son affirmation de la veille.

Problème 68 (Des œufs)

Notons x le nombre d'oeufs achetés initialement. Le prix en centime payé pour chacun de ces oeufs est $\dfrac{12}{x}$. Comme deux oeufs sont offerts par l'épicier pour le même prix, le prix en centime réellement payé pour chaque oeuf à l'issue de la vente est $\dfrac{12}{x+2}$. Par hypothèse, il est inférieur de $\dfrac{1}{12}$ de centime au prix initial. On a donc l'équation suivante :

$$\frac{12}{x+2} = \frac{12}{x} - \frac{1}{12}$$

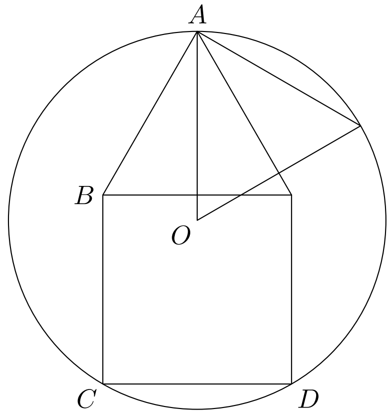
Cette équation équivaut à l'équation du second degré $x^2 + 2x - 288 = 0$, qui admet deux solutions, dont une seule est positive : 16 (l'autre solution étant -18).
Conclusion : J'ai acheté 16 oeufs, et en ai emportés 18.

Problème 69 (Les cent Mafieux)

Il y a donc 99 mafieux dans ce village.

Problème 70 (Le cercle de la félicité)

Le rayon du cercle est de 5 cm
Il suffit d'opérer une rotation de 30° du triangle équilatéral autour de son sommet A. Le côté $[AB]$ se transforme en un segment vertical $[AO]$.
$AOCB$ est un losange, ce qui explique que O, situé à la distance $5\,cm$ de A et C (et par symétrie de D), est le centre du cercle de la félicité.



Problème 71 (Le numéro du coffre)

La combinaison est 47228
Sur les dix combinaisons, le premier chiffre n'est correct qu'une fois. L'un des quatre autres chiffres (au moins) est donc correctement placé trois fois.
Seuls, le 7 en deuxième position ou le 3 en troisième position sont utilisés trois fois. Étant simultanément présents dans une combinaison, ils ne peuvent être corrects tous les deux.
Un chiffre est donc correctement placé trois fois, trois chiffres correctement placés deux fois, le premier chiffre une fois.
Le deuxième chiffre est soit le 7 (utilisé trois fois) soit le 5 (utilisé deux fois). Mais si c'était le 5, le troisième chiffre serait 3 (restant seul à être utilisé trois fois), ce qui est impossible à cause de la combinaison 45375.
En conséquence, le deuxième chiffre est 7. Du coup, le troisième ne peut être que 2 (utilisé deux fois), le cinquième 8 (car le 7, autre chiffre utilisé deux fois, cohabite avec le 2 de la troisième position), et le quatrième 2 (élimination du 5 à cause de 70558). Il ne reste plus qu'à conclure.

Problème 72 (L'escalator)

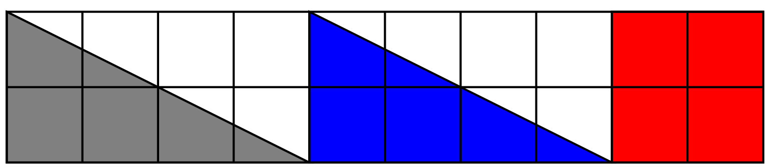
L'escalator gravit donc dix-huit marches en trente secondes auxquelles viennent s'ajouter les trente montées par Madame Matronome.
L'escalier a donc **quarante-huit marches**.

Problème 73 (Le 29 février)

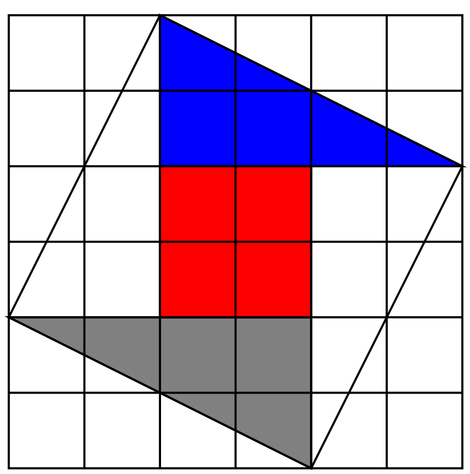
Il aura **vingt-huit ans**.
En effet, chaque année, la même date anniversaire se décale d'un jour plus tard dans la semaine car 365 est un multiple de 7 plus 1.
Pour les années bissextiles, qui comptent 366 jours, le décalage est de deux jours.
Quatre ans séparent deux années bissextiles[1].
Entre deux 29 février, il y a donc cinq jours de décalage $(3+2)$. Ainsi, le premier 29 février après la naissance de l'enfant étant décalé de cinq jours serait un samedi.
Le deuxième tombera un jeudi, le troisième un mardi, le quatrième un dimanche, le cinquième un vendredi, le sixième un mercredi et enfin le septième un lundi.
Le fils de dame Gertrude aura donc $7 \times 4 = 28$ ans la prochaine fois que son anniversaire tombera un lundi.

Problème 74 (Long rectangle deviendra carré)

La surface du rectangle formé par le parchemin est de 5 ($l \times L = 1 \times 5 = 5$). Donc le côté doit être de $\sqrt{5}$.
On découpe donc le parchemin de façon à faire apparaître des segments de droites de longueur égale à $\sqrt{5}$.



On réarrange comme indiqué sur la figure, et le long rectangle se transforme en carré !



[1]Certaines années bissextiles peuvent être séparées de huit ans puisque toutes les années divisibles par 100 mais pas par 400 ne sont pas bissextiles. Comme le bébé est né sous le règle de Louis XIII (début du XVII^e) la prochaine année de ce type serait 1700 et le bébé de Gertrude serait probablement mort à cette date.

« TOURNEZ MÉNINGES »

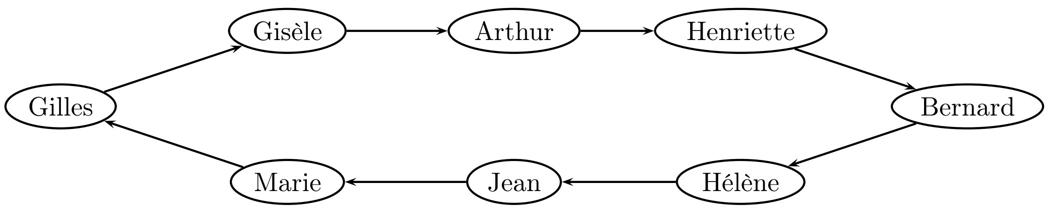
le rallye du lycée François 1er
Correction de la sixième étape

Problème 75 (Pourquoi TANT de N ?)

TANT = (AN)×(NA) et 6789 = (78) × (87).

Problème 76 (Ce Gilles ! Quel Don Juan !)

Gisèle aime Arthur :



Problème 77 (Jeu à trois)

Comme 9 est impair, seul Eberulf a pu perdre la dernière partie. Avant celle-ci, leurs avoirs étaient : 4 / 18 / 5 (manche n°5).
Même méthode pour les tours précédents :
- Léandre a perdu la manche n°4 et chacun avait en poche au début : 2 deniers (Martin), 9 deniers (Eberulf) et 16 deniers (Léandre) ;
- Eberulf a perdu la manche n°3 et chacun avait en poche au début : 1 denier (Martin), 18 deniers (Eberulf) et 8 deniers (Léandre) ;
- Martin a perdu la manche n°2 et chacun avait en poche au début : 14 deniers (Martin), 9 deniers (Eberulf) et 4 deniers (Léandre) ;
- Eberulf a perdu la manche n°1 et chacun avait en poche au début : **7 deniers (Martin), 18 deniers (Eberulf) et 2 deniers (Léandre)**.

Dernière étape

Un pot sera servi le **mercredi 21 mai 2008 à 12h** afin de remercier tous les participants et de départager les ex æquo.

Index